Übungen zur Theoretischen Physik Ia: Klassische Mechanik

SoSe 25

Prof. Dr. V. Braun

Blatt 5 — Ausgabe: 20.05.2025 — Abgabe: 26.-30.05.2025

Aufgabe 17: Elektromagnetische Kräfte

Zeigen Sie, daß sich aus der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

die Lorentzkraft

$$\vec{F}(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = q\left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)\right)$$

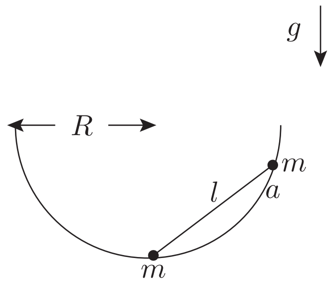
mit

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla}\,\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\
\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t),
\end{aligned}$$

ergibt.

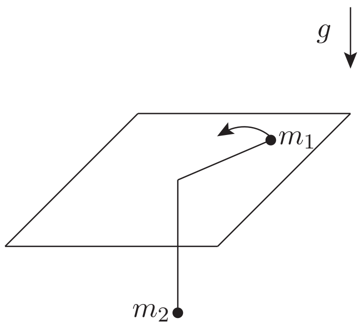
Aufgabe 18: Hantel

Zwei durch eine masselose starre Stange der Länge l verbundene Massenpunkte der Masse m können reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft in einer halbkreisförmigen Rinne mit Radius R gleiten, wobei $l < 2R$ gelte. Finden Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion sowie die Bewegungsgleichungen auf. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen und für anfänglich in Ruhe befindliche Massenpunkte, wobei sich der äußere im Abstand a von der Symmetrieachse der Rinne befinde.



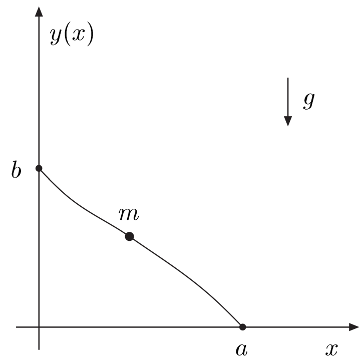
Aufgabe 19: Rotierende Masse

Stellen Sie für nebenstehend skizziertes System zweier durch ein Seil der Länge l verbundenen Massenpunkte, von denen der eine reibungsfrei auf einer Fläche in der (x, y)-Ebene rotiert, die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen auf. Das Seil sei reibungsfrei durch ein Loch in der Fläche geführt. Welche Erhaltungsgrößen gibt es? Gibt es eine Gleichgewichtslage?



Aufgabe 20: Brachistochrone

Bestimmen Sie die Kurve, auf der ein reibungsfrei gleitender Körper im Schwerefeld am schnellsten von einem Punkt zu einem anderen mit vertikalem Abstand b und horizontalem Abstand a kommt. Skizzieren Sie diese für die Fälle $\frac{a}{b} < \frac{\pi}{2}$, $\frac{a}{b} = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{a}{b} > \frac{\pi}{2}$.



Hinweise:

- Finden Sie ein erstes Integral der Euler-Lagrange-Gleichungen, indem Sie das Analogon der Energieerhaltung nutzen, und zeigen Sie, daß die Parameterdarstellung einer Zykloide $x(\tau) = A(\tau - \sin\tau)$, $y(\tau) = b - A(1 - \cos\tau)$ die resultierende Differentialgleichung löst.